



TUGAS AKHIR SM-141501

**OPTIMASI PERTUMBUHAN MIKROALGA
DENGAN PENGECERAN NUTRISI
MENGUNAKAN KENDALI OPTIMAL UNTUK
MEMAKSIMALKAN HASIL BIOMASSA**

MUHAMMAD SAMSUL MA'ARIF
NRP 1212 100 064

Dosen Pembimbing
Dr. Dra. Mardijah, MT

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2016



FINAL PROJECT SM-141501

***OPTIMIZATION OF MICROALGAE GROWTH BY
USING DILUTION NUTRITION WITH OPTIMAL
CONTROL TO MAXIMIZE RESULTS OF BIOMASS***

MUHAMMAD SAMSUL MA'ARIF
NRP 1212 100 064

Supervisor
Dr. Dra. Mardlijah, MT

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Science
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2016

LEMBAR PENGESAHAN

**OPTIMASI PERTUMBUHAN MIKROALGA DENGAN
PENGECERAN NUTRISI MENGGUNAKAN KENDALI
OPTIMAL UNTUK MEMAKSIMALKAN HASIL BIOMASSA**

***OPTIMIZATION OF MICROALGAE GROWTH BY USING
DILUTION NUTRION WITH OPTIMAL CONTROL TO
MAXIMIZE RESULTS OF BIOMASS***

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Bidang Studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :

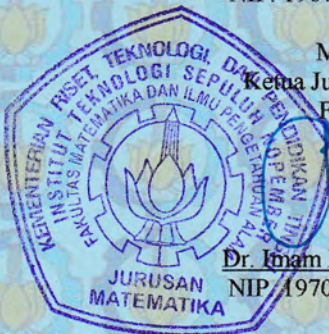
MUHAMMAD SAMSUL MA'ARIF
NRP. 1212 100 064

Menyetujui,
Dosen Pembimbing



Dr. Dra. Mardlijah, MT
NIP. 19670114 199102 2 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS



Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, Januari 2016

OPTIMASI PERTUMBUHAN MIKROALGA DENGAN PENGECERAN NUTRISI MENGGUNAKAN KENDALI OPTIMAL UNTUK MEMAKSIMALKAN HASIL BIOMASSA

Nama : Muhammad Samsul Ma'arif
NRP : 1212 100 064
Jurusan : Matematika
Dosen Pembimbing : Dr. Dra. Mardijah, MT

ABSTRAK

Mikroalga merupakan mikroorganisme yang memiliki potensi sebagai energi alternatif biomassa. Pertumbuhan mikroalga sangatlah dibutuhkan untuk memproduksi biomassa yang lebih banyak dan pemodelan matematika mampu memprediksi pertumbuhan mikroalga. Dalam proses pertumbuhan mikroalga, nutrisi yang ada pada mikroalga sangat mempengaruhi pertumbuhannya. Sehingga untuk mendapatkan biomassa yang banyak kita bisa mengatur pertumbuhan mikroalga melalui pengenceran nutrisinya. Kemudian dilakukan pengendalian optimal pada pengenceran nutrisi dengan menggunakan PMP (*Pontryagin Minimum Principle*). Dalam Tugas Akhir ini menunjukkan bahwa jumlah biomassa akan meningkat dengan adanya kendali optimal pada tingkat pengenceran nutrisi.

Kata Kunci: *Microalga, Pengenceran Nutrisi, Droop model.*



**OPTIMIZATION OF MICROALGAE GROWTH BY DILUTION
NUTRITION CONTROL WITH OPTIMAL CONTROL TO
MAXIMIZE RESULTS OF BIOMASS**

Name of Student : *Muhammad Samsul Ma'arif*
NRP : *1212 100 064*
Department : *Matematika*
Supervisor : *Dr. Dra. Mardlijah, MT*

ABSTRACT

Microalgae are microorganisms that have potential of biomass as an alternative energy. Microalgae growth is needed to produce more biomass and mathematical modeling is able to predict the growth of microalgae. In the process of the growth of microalgae, the nutrition is greatly effect growth on microalgae. To get a lot of biomass, we can control the light intensity. Then the optimal control is done through the dilution nutrition by using PMP (Pontryagin Minimum Principle). This Final Project shown that the biomass will increase with the presence of optimal control on rate dilution of nutrients.

Keywords: *Microalga, Dilution nutrition, Droop models.*



KATA PENGANTAR

Assalamualaikum.

Alhamdulillahirobbil'alamin, segala puji hanya milik Allah yang memiliki apa yang ada di langit dan di bumi. Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu, dan sesungguhnya Allah ilmuNya benar-benar meliputi segala sesuatu. Dan karena limpahan kasih sayang, karunia, petunjuk serta bimbingan-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini dengan baik yang berjudul :

“Optimasi Pertumbuhan Mikroalga Dengan Pengenceran Nutrisi Menggunakan Kontrol Optimal Untuk Memaksimalkan Hasil Biomassa”

sebagai salah satu syarat kelulusan menempuh program S1 Matematika FMIPA ITS. Dalam penulisan Tugas Akhir ini tidak akan terselesaikan dengan baik tanpa adanya bimbingan dan bantuan dari berbagai pihak. Suatu kebahagiaan dan kewajiban bagi penulis untuk menyampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dan mendukung atas terselesainya Tugas Akhir :

1. Kedua orang tua, mbak, adik, serta keluarga dekat yang selalu mendoakan dan memberikan motivasi.
2. Ibu Dr. Dra. Mardlijah M.T, selaku pembimbing Tugas Akhir yang telah banyak mengarahkan dan memberikan masukan serta motivasi sehingga Tugas Akhir ini dapat terselesaikan.
3. Bapak Drs. Suharmadi, Dipl. Sc, M.Phil, Ibu Dra. Nur Asiyah, M.Si, Bapak Drs. Mohammad Setijo Winarko, M.Si dan Ibu Endah Rokhmati M.P., Ph.D selaku dosen penguji Tugas Akhir, atas semua saran dan masukan yang diberikan kepada penulis.
4. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT selaku ketua jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

5. Ibu Dra. Nur Asiyah, M.Si selaku dosen wali yang memberikan arahan dan masukan kepada penulis, serta Bapak Drs. Bandung Arry Sanjoyo M.Ikom selaku dosen wali pertama saya.
6. Bapak Ibu dosen, seluruh staf Tata Usaha (Pak Toat dan kawan-kawan), asisten laboratorium (Pak Muhtadi, Pak Joko, Mas Ali dkk).
7. Seluruh pihak yang terkait yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang secara tidak langsung telah membantu penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir.

Penulis menyadari sepenuhnya dalam penulisan ini masih banyak kekurangan, kesalahan dan masih jauh dari sempurna, sehingga segala saran dan kritik yang sifatnya membangun sangat diharapkan oleh penulis. Akhirnya penulis berharap semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya.

Wassalamualaikum.

Surabaya, 05 Maret 2016

Penulis

Special thanks to

Selama proses pembuatan Tugas Akhir ini, banyak pihak yang telah memberikan bantuan dan dukungan untuk penulis. Penulis sungguh ingin mengucapkan terima kasih dan apresiasi secara khusus kepada:

1. Bapak dan Emak tercinta yang senantiasa dengan ikhlas memberikan semangat, doa, dan nasihat-nasihat yang sungguh berarti bagi penulis serta saudaraku Mbak Winda, Andri, Adit serta semua keluargaku.
2. Teruntuk yang spesial yakni untuk seorang wanita di masa depan yang selalu menginspirasi dalam pembuatan Tugas Akhir ini.
3. Sahabatku Muklis dan Yuda serta teman-teman satu duka satu bahagia Epi, Tika, Prisma, Adhel, Tito, Ninid, Resi, Iyun, Sega, Jajak, Kemprow, Gebang gank, Klub Keilmiah ITS, Sainstek, Panitia Pimnas 27, BoB dan teman-teman 2012, mas mbak 2010, 2011 dan adik-adik 2013, 2014 yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.
4. Teman-teman Kelas VIIA, VIIIA, IXA, X.1, XI.1 dan XII.1 (One Heart).

Tentu saja masih banyak pihak lain yang turut andil dalam penyelesaian tugas akhir ini yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu. Semoga Allah membalas dengan balasan yang lebih baik bagi semua pihak yang telah membantu penulis.
Amin Ya Rabbal 'Alamin.



DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xv
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR TABEL	xix
DAFTAR LAMPIRAN	xxi
DAFTAR SIMBOL	xxiii
 BAB I. PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Batasan Masalah.....	2
1.4 Tujuan.....	3
1.5 Manfaat.....	3
1.6 Sistematika Penulisan.....	3
 BAB II. TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Penelitian Terdahulu.....	5
2.1.1 Kestabilan Pertumbuhan Mikroalga.....	5
2.1.2 Analisis Model Droop dan Kestabilan.....	7
2.1.3 Pengendalian Optimal Melalui Tingkat Pengenceran Nutrisi.....	10
2.2 Mikroalga.....	11
2.3 Prinsip Minimum Pontryagin.....	12
 BAB III. METODE PENELITIAN	
3.1 Studi Literatur.....	15
3.2 Desain Kendali Optimal.....	15
3.3 Penyelesaian Kendali.....	15
3.4 Simulasi dan Analisis Hasil Simulasi.....	15
3.5 Menarik Kesimpulan dan Saran.....	16

BAB IV. ANALISIS DAN PEMBAHASAN

4.1 Model Droop	17
4.2 Penyelesaian dengan Kendali Optimal	19
4.3 Simulasi dan Analisis Hasil Simulasi	23

BAB V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan	31
5.2 Saran	31

DAFTAR PUSTAKA	33
-----------------------------	----

LAMPIRAN 1	35
-------------------------	----

LAMPIRAN 2	39
-------------------------	----

BIODATA PENULIS	45
------------------------------	----

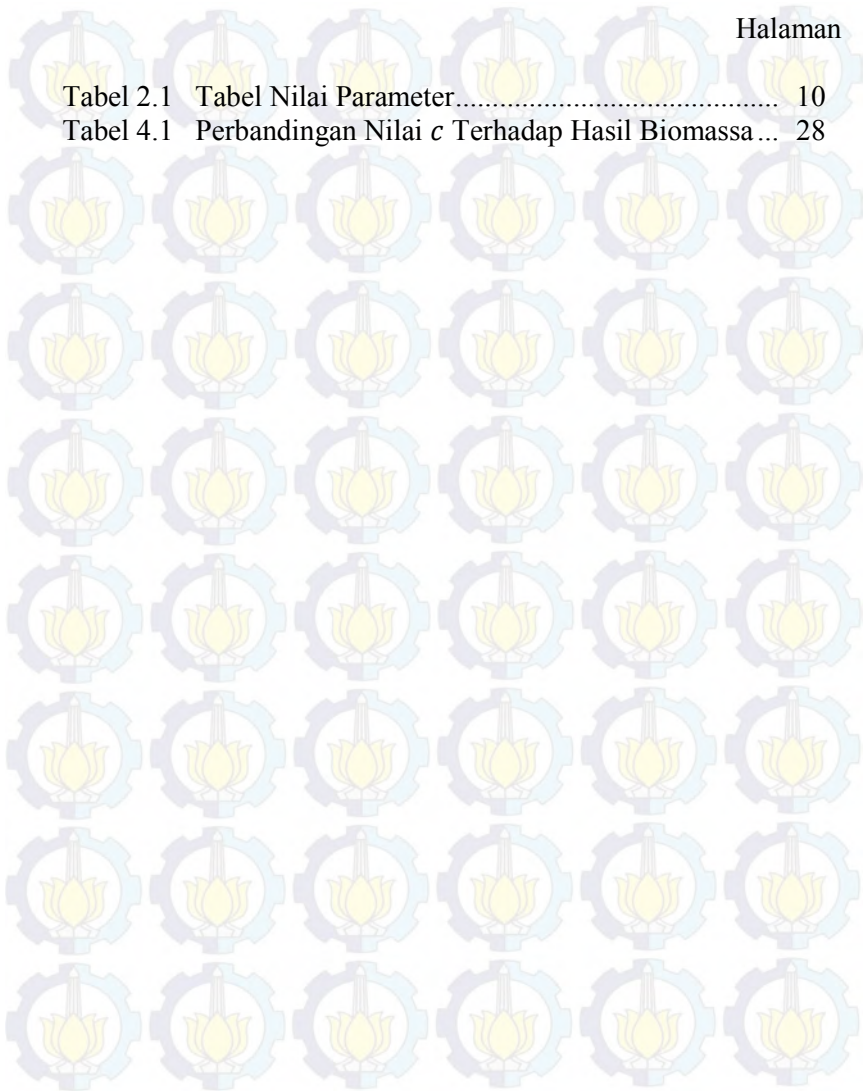
DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 3.1 Diagram Alur Penelitian	16
Gambar 4.1 Diagram Pertumbuhan Mikroalga	18
Gambar 4.2 Tingkat Hasil Biomassa Tanpa Pengendalian ..	24
Gambar 4.3 Tingkat Hasil Biomassa dengan Pengendalian.	25
Gambar 4.4 Grafik Tingkat pengenceran Nutrisi	26
Gambar 4.5 Grafik Tingkat Jumlah Biomassa dengan c=23.....	27
Gambar 4.6 Grafik Tingkat Jumlah Biomassa dengan c=30.....	28



DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 2.1 Tabel Nilai Parameter.....	10
Tabel 4.1 Perbandingan Nilai c Terhadap Hasil Biomassa ...	28





DAFTAR SIMBOL

H	: Fungsi Hamiltonian
J	: Fungsi objektif
$Q(t)$: <i>Cell quota</i>
$X(t)$: Konsentrasi biomassa
$S(t)$: Konsentrasi nutrisi
$S_{in}(t)$: Konsentrasi nutrisi external yang masuk pada diri mikroalga
D	: Tingkat pengenceran
$\bar{\rho}$: Penyerapan maksimal nutrisi biomassa
$\mu(q)$: Pertumbuhan mikroalga
$\rho(s)$: Penyerapan pada biomassa
$\bar{\mu}$: Pertumbuhan Minimum pada microalga
$\bar{\rho}$: Penyerapan Maksimum nutrisi biomassa
K_s	: Konstanta setengah saturasi
N	: Kerapatan wadah untuk melakukan photosynthesis
σ	: Kerapatan cahaya yang masuk
I	: Cahaya
τ	: Waktu perputaran rantai transpor elektron.
K	: Konstanta dimana pada saat cahaya maksimum
c	: Bobot biaya pengenceran
Q_0	: Kuota nitrogen minimum
β	: Koefisien sintesis asam lemak
γ	: Koefisien mobilisasi asam lemak
α	: Koefisien sintesis protein



DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

Lampiran 1. Diagram Alir Simulasi tanpa Kendali	35
Lampiran 2. Diagram Alir Simulasi dengan Kendali	36
Lampiran 3. Sistem Tanpa Kendali	38
Lampiran 4. Sistem dengan Kendali	42



BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan hal-hal yang melatar-belakangi munculnya permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini. Kemudian permasalahan tersebut disusun kedalam suatu rumusan masalah. Selanjutnya dijabarkan juga batasan masalah untuk mendapatkan tujuan yang diinginkan serta manfaat yang dapat diperoleh. Adapun sistematika penulisan Tugas Akhir diuraikan pada bagian akhir bab ini.

1.1 Latar Belakang

Minyak bumi sebagai bahan bakar fosil telah mengalami eksploitasi berlebihan hingga menyebabkan polusi dan kelangkaan cadangan minyak bumi dunia [1]. Produksi biofuel terutama biomassa telah menjadi alternatif dalam mengatasi kelangkaan bahan bakar minyak. Menurut Skenario Dasar [2] pasokan biomassa 2010-2030 akan turun 0,9% per tahun, dari 41 juta SBM (Setara Barel Minyak) di tahun 2010 menjadi 34 juta SBM di tahun 2030. Pangsa biomassa juga akan turun, yaitu 0,7% di tahun 2030. Penurunan ini diakibatkan keterbatasan pasokan biomassa, padahal di Indonesia potensi biomassa mencapai 671.982,89 juta SBM.

Indonesia memiliki keanekaragaman hayati yang sangat berlimpah, termasuk di dalamnya adalah keanekaragaman hayati mikroalga. Mikroalga merupakan tumbuhan tingkat rendah yang memiliki potensi sebagai penghasil bahan baku biomassa. Berdasarkan beberapa penelitian, mikroalga mempunyai kemampuan yang sangat besar untuk menghasilkan biomassa lebih kurang 60% dari berat kering. Terkait dengan produksi mikroalga, proses pembuatan biomassa ini dimulai dengan pengembangbiakan mikroalga, pemanenan dan pengeringan. Berdasarkan Sri Amini pada *Forum Knowledge Sharing* Litbang ESDM 2010, hasil

pengembangan mikroalga pada bak-bak ukuran 1 ton dalam media air budidaya, hanya mampu menghasilkan 2-3% biomassa. Hasil yang didapatkan sangat jauh dengan potensi mikroalga itu sendiri. Sehingga untuk mendapatkan produksi biomassa yang maksimal diperlukan perhitungan prinsip kontrol. Banyak sedikitnya hasil biomassa dipengaruhi dari cahaya dan tingkat pengenceran nutrisi yang nantinya akan dijadikan sebagai bahan fotosintesis untuk menghasilkan biomassa [3]. Sebelumnya, Riya Mahmudah melakukan penelitian tentang optimasi biomassa dengan mengontrol tingkat pengenceran nutrisi. Dia menggunakan model Monod sebagai model pertumbuhan mikroalga serta Prinsip Maksimum Pontryagin sebagai metode pengontrolnya. Hasil yang didapatkan dalam penelitiannya adalah adanya peningkatan biomassa sebelum mikroalga tersebut dikontrol.

Berdasarkan permasalahan tersebut, penulis tertarik untuk melakukan penelitian guna memaksimalkan hasil biomassa dari mikroalga dengan cara melakukan kontrol pengenceran nutrisi pada model Droop pertumbuhan mikroalga.

1.2 Rumusan Masalah

Masalah yang harus dijawab dalam penelitian ini adalah bagaimana pengendalian tingkat pengenceran nutrisi yang masuk sehingga pertumbuhan alga meningkat dan mampu menghasilkan biomassa yang maksimal.

1.3 Batasan Masalah

Batasan dalam permasalahan diatas adalah:

1. Pertumbuhan mikroalga dengan model Droop
2. Menerapkan Prinsip Minimum Pontryagin dalam menyelesaikan masalah kendali pengenceran nutrisi
3. Pertumbuhan mikroalga selalu ada

4. Proses pengembangan mikroalga di suatu tempat tertutup (fotobioreaktor) sehingga kita bisa mengatur tingkat pengenceran nutrisi yang masuk

1.4 Tujuan

Tujuan dalam penelitian ini adalah mengendalikan tingkat pengenceran nutrisi yang masuk sehingga pertumbuhan alga meningkat dan mampu menghasilkan biomassa yang maksimal.

1.5 Manfaat

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Memberikan solusi untuk memaksimalkan hasil biomassa.
2. Sebagai bahan dasar penelitian lanjutan.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan Tugas Akhir ini disusun dalam lima bab, yaitu:

1. BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada Bab II diuraikan mengenai mikroalga, model Droop serta penelitian-penelitian sebelumnya. Selain itu, bab ini juga berisikan materi-materi yang mendukung proses pengerjaan Tugas Akhir, antara lain teori kendali optimal, Prinsip Maksimum Pontryagin.

3. BAB III METODE PENELITIAN

Dalam bab ini dijelaskan tahapan-tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan Tugas Akhir. Tahapan-tahapan tersebut antara lain studi literatur, desain kontrol dan penyelesaian kontrol. Selanjutnya dilakukan simulasi dan analisis terhadap hasil yang didapat. Tahap terakhir adalah melakukan penarikan kesimpulan hasil analisis dan pembahasan yang dilakukan.

4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada Bab IV dibahas secara detail mengenai formulasi dan penyelesaian masalah kendali optimal dalam pertumbuhan mikroalga melalui kontrol cahaya yang masuk, serta penjelasan mengenai hasil simulasi yang diperoleh.

5. BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan akhir yang diperoleh dari Tugas Akhir serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai penelitian sebelumnya, pengertian mikroalga, penjelasan model Droop, kestabilan model Droop, teori kendali optimal serta Prinsip Minimum Pontryagin.

2.1 Penelitian Terdahulu

2.1.1 Kestabilan Pertumbuhan Mikroalga

Pada penelitian sebelumnya [4] membahas analisis model dinamik pertumbuhan mikroalga dengan kondisi keterbatasan nutrisi. Dengan menggunakan model produksi lipid netral, akan diamati kestabilan model tersebut. Model ini mengasumsikan bahwa tingkat pertumbuhan mikroalga bergantung pada konsentrasi intraseluler nitrogen q_n . Model produksi lipid netral pada mikroalga dengan keterbatasan nutrisi dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial yang merepresentasikan laju perubahan variabel-variabel sistem terhadap waktu. Variabel-variabel tersebut adalah sumber nutrisi anorganik s , kuota nitrogen intraseluler q_n , biomassa x , kuota lipid q_1 dan kuota karbon fungsional q_f yang dinyatakan dalam persamaan sebagai berikut:

$$\frac{ds}{dt} = Ds_{in} - \rho(s)x - Ds \quad (2.1)$$

$$\frac{dq_n}{dt} = \rho(s)x - \mu(q_n)q_n \quad (2.2)$$

$$\frac{dx}{dt} = \mu(q_n)x - Ds \quad (2.3)$$

$$\frac{dq_1}{dt} = (\beta q_n - q_1)\mu(q_n) - \gamma\rho(s) \quad (2.4)$$

$$\frac{dq_f}{dt} = -q_f\mu(q_n) + (\alpha + \gamma)\rho(s) \quad (2.5)$$

Dimana

D = laju pengenceran

β = koefisien sintesis asam lemak

γ = koefisien mobilisasi asam lemak

α = koefisien sintesis protein

Q_0 = kuota nitrogen Minimum

ρ = laju penyerapan

Model tersebut akan dicek kestabilannya dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Apabila kriteria Routh-Hurwitz semuanya bertanda negatif, maka model tersebut adalah stabil. Hasil dari penelitian ini didapatkan sistem tersebut adalah stabil, sementara laju pertumbuhan nutrisi, nitrogen intraseluler, fungsional karbon dan lipid mengalami penurunan dan menuju suatu titik tertentu. Sehingga didapatkan kesimpulan laju pertumbuhan biomassa terus meningkat dan menuju suatu titik tertentu.

Kestabilan pertumbuhan mikroalga juga pernah diteliti [5] dengan kondisi alga yang pertumbuhannya dibangun dengan memanfaatkan air limbah pabrik dan juga dipengaruhi karbon dioksida, fotosintesis serta glukosa. Dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz juga, didapatkan dua titik setimbang yang keduanya bersifat stabil.

2.1.2 Analisis Model Droop dan Kestabilan

Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh M. Virama H.C [8] mengenai analisis dan kestabilan, model Droop didefinisikan sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = DS_{in} - DS - \bar{\rho} \left(\frac{S}{S+K_s} \right) X \quad (2.6)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \bar{\rho} \left(\frac{S}{S+K_s} \right) - \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q} \right) \frac{N\sigma I}{1+\tau\sigma I + K\tau\sigma^2 I^2} Q \quad (2.7)$$

$$\frac{dX}{dt} = \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q} \right) \frac{N\sigma I}{1+\tau\sigma I + K\tau\sigma^2 I^2} X - DX \quad (2.8)$$

Sedangkan persamaan pertumbuhan mikroalga adalah sebagai berikut:

$$\mu = \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{q} \right) \frac{N\sigma I}{1+\tau\sigma I + K\tau\sigma^2 I^2} \quad (2.9)$$

dengan kondisi awal

$$S(0) \geq 0, Q(0) \geq 0, X(0) \geq 0$$

Keterangan :

$Q(t)$: Cell quota

$X(t)$: Konsentrasi biomassa

$S(t)$: Konsentrasi nutrisi

$S_{in}(t)$: Konsentrasi nutrisi external yang masuk pada diri mikroalga

D : Tingkat pengenceran

$\bar{\rho}$: Penyerapan maksimal nutrisi biomassa

$\mu(q)$: Pertumbuhan mikroalga

$\rho(s)$: Penyerapan pada biomassa

$\bar{\mu}$: Pertumbuhan Minimum pada microalga

$\bar{\rho}$: Penyerapan Maksimum nutrisi biomassa

K_s : Konstanta setengah saturasi

- N : Kerapatan wadah untuk melakukan photosynthesis
 σ : Kerapatan cahaya yang masuk
 I : Cahaya
 τ : Waktu perputaran rantai transpor elektron.
 K : Konstanta dimana pada saat cahaya maksimum

Dari model Droop di atas, dilakukan perhitungan titik kesetimbangan, namun sebelum itu dalam model Droop akan diubah dalam bentuk nondimensional. Tujuan mengubah model Droop menjadi bentuk nondimensional adalah untuk mempermudah perhitungan dengan cara menghilangkan satuannya. Berikut adalah permisalan dari nondimensional model Droop :

$$\begin{aligned}
 t &= DT; \quad s = \frac{S}{S_{in}}; \quad x = \frac{\bar{\rho}X}{DS_{in}}; \quad q = \frac{Q}{Q_0} \\
 \alpha_1 &= \frac{K_s}{S_{in}}; \quad \alpha_2 = \frac{\bar{\mu}}{D}; \quad \alpha_3 = \frac{\bar{\rho}}{DK_s}; \\
 \alpha_4 &= \frac{N\sigma I}{1 + \tau\sigma I + K\tau\sigma^2 I^2}
 \end{aligned}$$

dengan T adalah waktu, yang menghasilkan persamaan baru dari nondimensional Droop.

$$\frac{ds}{dt} = 1 - s - \frac{sx}{\alpha_1 + s} \quad (10)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\alpha_3 s}{\alpha_1 + s} - \alpha_2 [q - 1] \alpha_4 \quad (11)$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_2 \left[1 - \frac{1}{q} \right] \alpha_4 x - x \quad (12)$$

dengan kondisi awal :

$$x(0) \geq 0, q(0) \geq 0, x(0) \geq 0$$

dan syarat batasnya adalah

$$s \leq 1, q \leq \alpha_4 + \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, x \leq \frac{\alpha_3}{\alpha_4}$$

Titik kesetimbangan yang diperoleh dari penelitian ini adalah:

Titik setimbang bebas biomassa

$$E_0 = \left(1, 1 + \frac{\alpha_3}{\alpha_2 \alpha_4 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_4}, 0 \right)$$

dan titik kesetimbangan biomassa

$$E_1 = (a, b, c)$$

dengan
$$a = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4}{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_4 - \alpha_3 - \alpha_2 \alpha_4}$$

$$b = \frac{\alpha_2 \alpha_4}{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_4 - \alpha_3 - \alpha_2 \alpha_4}$$

$$c = \frac{\alpha_2 \alpha_4 - 1}{\alpha_2 \alpha_4} - \alpha_1 + 1$$

$$- \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4}{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_4 - \alpha_3 - \alpha_2 \alpha_4}$$

Tabel 2.1. Tabel Nilai Parameter

Parameter	Nilai
S_{in}	1 mgN/L
I	1.2
N	5.9
$\bar{\rho}$	11.4 $\frac{\text{mgN}}{\text{mgCd}}$
$\bar{\mu}$	12.4 d^{-1}
τ	2.4
K_s	2 mgN/L
σ	1.2
K	0.001
Q_0	1
$S(0)$	10 mgC/L
$Q(0)$	1 mgN/mgC
$X(0)$	1 mgC/L

Sumber : M. Virama H.C, “Analisis Model Droop untuk Pertumbuhan Mikroalga terhadap Keterbatasan Nutrisi”.

2.1.3 Pengendalian Optimal Melalui Tingkat Pengenceran Nutrisi

Mikroalga merupakan mikroorganisme fotosintetik yang berpotensi sebagai sumber biodiesel dan penyerap emisi CO₂ karena pertumbuhannya yang cepat dan melimpah. Mikroalga dapat dikembangkan di dalam suatu kultivasi berupa fotobioreaktor dan menggunakan cahaya dan CO₂ sebagai pertumbuhannya. Pertumbuhan mikroalga di dalam suatu fotobioreaktor dimodelkan dengan model Monod, yang mana menghubungkan pengaruh pemberian substrat pada produksi biomassa mikroalga. Setelah

mendapatkan model pertumbuhan mikroalga, kemudian dilakukan pengendalian optimal pada tingkat pengencerannya dengan menggunakan PMP (*Pontryagin Maximum Principle*) dan didapatkan kendali berupa Bang-Singular-Bang [6]. Adapun hasil yang didapat dari penelitian ini adalah kendali optimal yang diperoleh pada upaya pemaksimalan produksi biomassa dalam fotobioreaktor dengan model Monod mempunyai bentuk yang tidak tunggal. Kendali yang diperoleh adalah berupa *bang-singular-bang* yang bergantung pada nilai fungsi *switching* pada interval waktu yang berbeda-beda. Kendalinya dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$u(t) = \begin{cases} 7, & \text{jika } H_u > 0 \\ u_{sing}, & \text{jika } H_u = 0 \\ 2, & \text{jika } H_u < 0 \end{cases}$$

dengan fungsi *switching* $H_u = 1 - \lambda$ dan

$$u_{sing} = \frac{\lambda \left(\frac{k\mu}{k+x} - r \right)}{\lambda - 1}$$

Jika dibandingkan dengan kendali konstan yaitu $u = 6$, kendali *bang-singular-bang* lebih menguntungkan karena dapat memproduksi biomassa yang lebih banyak.

2.2 Mikroalga

Menurut M.R. Droop [7] mikroalga adalah mikroorganisme nabati yang hidup melayang-layang di dalam air, relatif tidak mempunyai daya gerak sehingga

keberadaannya dipengaruhi oleh gerakan air serta mampu berfotosintesis. Mikroalga merupakan mikroorganisme (ukuran 1-100 μm) fotosintetik yang berpotensi digunakan untuk produk *fine chemicals* [8], unsur tambahan makanan untuk manusia dan hewan, *system immobile* pembetulan senyawa *extraseluller*, untuk biosorpsi logam, dan fiksasi CO_2 [9] pada umumnya mikroalga bersel satu atau berbentuk benang, sebagai tumbuhan dan dikenal sebagai fitoplankton. Sebagai dasar mata rantai pada siklus makanan di laut, *fitoplankton* menjadi makanan alami bagi *zooplankton* baik masih kecil maupun yang dewasa.

Mikroalga menggunakan cahaya untuk metabolisme CO_2 menjadi biomassa (CH_2O) dengan bantuan sinar dan air sesuai dengan reaksi berikut:



Reaksi tersebut disebut proses fotosintetik dimana oksigen juga dihasilkan sebagai hasil selain CH_2O . Cahaya yang digunakan untuk proses fotosintetik dapat berupa cahaya sintetis ataupun cahaya matahari yang sampai ke permukaan bumi sekitar $1500\text{-}2500 \text{ W/m}^2$.

2.3 Prinsip Minimum Pontryagin (PMP)

Prinsip Minimum digunakan untuk memperoleh penyelesaian kendali optimal yang sesuai dengan tujuan, yaitu memaksimumkan fungsi tujuan dimana kendali $\mathbf{u}(t)$ terbatas pada $(\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U})$. Hal ini telah dikembangkan oleh L. S. Pontryagin dan rekan kerjanya

pada tahun 1950 yang diaplikasikan untuk semua masalah kalkulus variasi. Oleh karena itu, prinsip ini biasa disebut dengan Prinsip Minimum Pontryagin.

Prinsip ini menyatakan secara informal bahwa persamaan Hamiltonian akan dimaksimumkan sepanjang \mathcal{U} yang merupakan himpunan kendali yang mungkin [10]. Hasilnya juga dapat dinamakan Prinsip Minimum Pontryagin karena mempunyai pengertian yang sama antara meminimalkan dan memaksimumkan dengan mengalikan (-1) pada fungsi tujuan. Prosedur menyelesaikan kendali optimal dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin adalah sebagai berikut [11]:

Diberikan persamaan plant: $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$

Diberikan indeks performansi: $J = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt$ dan kondisi batas $x(t_0) = x_0$ dan $x(t_f) = x_f$ bebas

Maka langkah-langkah penyelesaiannya adalah:

- a. Bentuk fungsi Pontryaginnya (Hamilton).

$$\begin{aligned} H(x(t), u(t), \lambda(t), t) \\ = V(x(t), u(t), t) + \lambda(t)f(x(t), u(t), t) \end{aligned}$$

- b. Maksimumkan H terhadap semua vektor kendali $u(t)$.

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right) = 0 \text{ dan diperoleh } u^*(t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

- c. Gunakan hasil dari langkah (b) ke dalam langkah (a) dan tentukan H^* yang optimal.

$$\begin{aligned} H^*(x^*(t), h(x^*(t), \lambda^*(t), t), \lambda^*(t), t) \\ = H^*(x^*(t), \lambda^*(t), t) \end{aligned}$$

d. Selesaikan sekumpulan $2n$ persamaan $\dot{x}(t) = + \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)$

dan $\dot{\lambda}^*(t) = - \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)$

dengan kondisi awal x_0 dan kondisi akhir $\left[H + \right.$

$$\left. \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{t_f} \partial t_f + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right) - \lambda^*(t) \right]_{t_f} \partial x_f = 0$$

e. Untuk memperoleh kendali optimal, substitusikan solusi $x^*(t), \lambda^*(t)$ dari langkah (d) ke dalam ekspresi optimal kendali u^* pada langkah (b)

BAB III

METODE PENELITIAN

Dalam bab ini diuraikan langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam proses pengerjaan Tugas Akhir. Metode penelitian dalam Tugas Akhir ini terdiri atas lima tahap, antara lain: studi literatur, desain kendali optimal, penyelesaian kendali optimal, simulasi model dengan menggunakan software MATLAB serta analisis hasil dan penarikan kesimpulan.

3.1 Studi Literatur

Kegiatan ini dilakukan dengan mencari materi penunjang dari buku, jurnal, artikel dan lain-lain. Bahan-bahan yang dikaji meliputi Mikroalga, Sifat-sifat dan kestabilan model Droop, sistem kendali optimal, Prinsip Minimum Pontryagin dan lain-lain.

3.2 Desain Kendali Optimal

Pada tahapan ini, ditentukan formulasi masalah kendali optimal yang meliputi penentuan kendali, menentukan desain kendali, fungsi objektif dari model Droop tersebut.

3.3 Penyelesaian Kendali

Tahap ini penyelesaian kendali optimal dengan menggunakan metode Prinsip Minimum Pontryagin. Langkah-langkah yang dilakukan adalah :

- a. Membentuk fungsi Hamiltonian
- b. Menentukan persamaan *state* dan *costate*
- c. Menentukan bentuk kendali optimal u^* berdasarkan keadaan stasioner.

3.4 Simulasi dan Analisis Hasil Simulasi

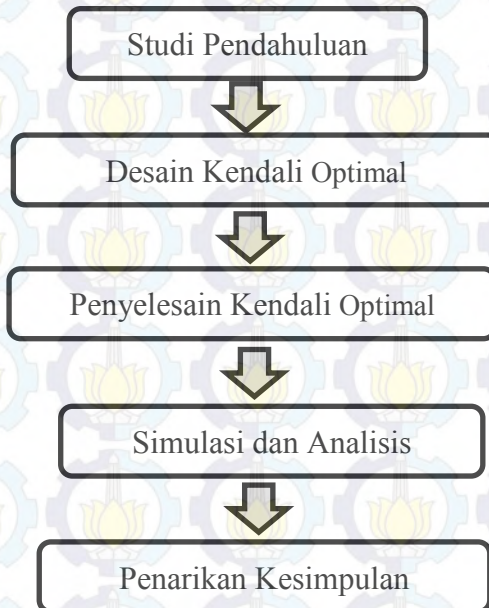
Kegiatan ini dilakukan setelah menyelesaikan permasalahan kendali optimal secara analitik. Adapun

software yang digunakan untuk simulasi adalah MATLAB. Setelah itu, akan dilakukan analisis dari hasil simulasi tersebut.

3.5 Penarikan Kesimpulan dan Pemberian Saran

Setelah menganalisis model matematika dari jumlah biomassa jika sebelum dan sesudah dilakukan kendali optimal, dan membuat simulasi modelnya menggunakan MATLAB maka penulis dalam kegiatan ini menyimpulkan hasil dari tugas akhir ini.

Adapun alur penelitian yang dilakukan dalam Tugas Akhir ini adalah:



Gambar 3.1. Diagram Alur Penelitian

BAB IV

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini dibahas tentang model Droop serta penyelesaian optimal kendali dari sistem dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin.

4.1 Model Droop

Dalam penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh M.R. Droop terhadap pertumbuhan mikroalga didapatkan model matematikanya, yang sering disebut dengan Model Droop. Berikut adalah penjelasan tentang model Droop, dimana pada penelitian yang dilakukan M.R. Droop bagian tubuh mikroalga dibagi menjadi tiga bagian yakni Nutrisi (S), *Cell Quota* (Q) dan Biomassa (X). Dalam penelitian yang dilakukan oleh M.R. Droop dijelaskan bahwa laju nutrisi diperoleh melalui nutrisi dari luar masuk ke dalam mikroalga lalu kemudian nutrisi yang telah masuk nantinya akan diserap oleh *Cell Quota* (Q) dan sebagian nutrisinya dikeluarkan dari tubuh untuk menstabilkan metabolisme mikroalga. Selanjutnya laju *Cell Quota* (Q) diperoleh dari serapan nutrisi, dimana nutrisi yang telah diserap tadi nantinya akan menjadi bahan baku dari proses fotosintesis. Dari proses fotosintesis yang terjadi dalam *Cell Quota* (Q) diperoleh hasil yaitu pertumbuhan sel. Selanjutnya laju Biomassa (X) diperoleh dari hasil proses fotosintesis yakni pertumbuhan sel dimana pertumbuhan sel mempengaruhi banyak sedikitnya biomassa yang dihasilkan namun pada bagian Biomassa (X) ini ada sebagian biomasanya keluar dari mikroalga yang bertujuan untuk menstabilkan metabolisme mikroalga. Untuk lebih jelasnya, berikut adalah diagram alur pertumbuhan mikroalga.



Gambar 4.1 Diagram Pertumbuhan Mikroalga

Sehingga dari percobaan M.R. Droop diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = DS_{in} - DS - \bar{\rho} \left(\frac{S}{S+K_S} \right) X \quad (4.1)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \bar{\rho} \left(\frac{S}{S+K_S} \right) - \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q} \right) \frac{N\sigma I}{1+\tau\sigma I + K\tau\sigma^2 I^2} Q \quad (4.2)$$

$$\frac{dX}{dt} = \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q} \right) \frac{N\sigma I}{1+\tau\sigma I + K\tau\sigma^2 I^2} X - DX \quad (4.3)$$

4.2 Penyelesaian dengan Kendali Optimal

Pengendalian pada suatu sistem bertujuan untuk memperoleh sifat-sifat sistem, yaitu adanya kestabilan titik kesetimbangan. Penyelesaian kendali optimal pada sistem ini digunakan untuk memaksimalkan produksi biomassa dari mikroalga melalui pengenceran nutrisi.

Diberikan fungsi tujuan sebagai berikut:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{cu^2}{2} - X \right) dt \quad (4.4)$$

dengan u adalah pengenceran nutrisi, c adalah bobot biaya pengenceran dan x adalah biomassa. Dalam penyelesaian kendali optimal, langkah awal yang dilakukan adalah menentukan fungsi Hamiltonian. Dengan memperhatikan formulasi kendali optimal, diperoleh fungsi Hamiltonian sebagai berikut:

$$\begin{aligned} H &= \mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda(t), t) \\ &= V(x(t), u(t), t) + \lambda'(t)f(x(t), u(t), t) \\ &= \frac{cu^2}{2} - x + \lambda_1(u(t)x(t)) + \lambda_2(u(t)x(t)) \\ &\quad + \lambda_3(u(t)x(t)) \\ &= \frac{cu^2}{2} - x + \lambda_1 \left(uS_{in} - uS - \rho \left(\frac{S}{S+K_s} \right) X \right) + \\ &\quad \lambda_2 \left(\rho \left(\frac{S}{S+K_s} \right) - \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q} \right) \frac{N\sigma I}{1+\tau\sigma I + K\tau\sigma^2 I^2} \right) + \lambda_3 \left(u \left(1 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{Q_0}{Q} \right) \frac{N\sigma I}{1+\tau\sigma I + K\tau\sigma^2 I^2} - uX \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Langkah berikutnya adalah menentukan kondisi stasioner dari persamaan (4.5) untuk mendapatkan persamaan kendali optimal.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

$$2 \left(\frac{c}{2} u \right) + \lambda_1(S_{in} - S) + \lambda_3(-X) = 0$$

$$cu + \lambda_1(S_{in} - S) - \lambda_3 X = 0$$

$$\lambda_1(S_{in} - S) - \lambda_3 X = -cu$$

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_1(S_{in} - S) - \lambda_3 X}{c} &= -u \\ -\frac{\lambda_1(S_{in} - S) - \lambda_3 X}{c} &= u \\ \frac{\lambda_1 S}{c} - \frac{\lambda_1 S_{in}}{c} + \frac{\lambda_3 X}{c} &= u\end{aligned}$$

Sehingga didapat persamaan kendali optimal yaitu:

$$u^* = \frac{\lambda_1 S}{c} - \frac{\lambda_1 S_{in}}{c} + \frac{\lambda_3 X}{c} \quad (4.6)$$

Tahap selanjutnya adalah substitusi (4.6) ke persamaan (4.5), sehingga diperoleh persamaan Hamiltonian yang baru:

$$\begin{aligned}H^* &= \frac{cu^{*2}}{2} - x + \lambda_1 \left(u^* S_{in} - u^* S - \rho \left(\frac{S}{S+K_s} \right) X \right) + \\ &\quad \lambda_2 \left(\rho \left(\frac{S}{S+K_s} \right) - u^* \left(1 - \frac{Q_0}{Q} \right) \frac{N\sigma I}{1+\tau\sigma I + K\tau\sigma^2 I^2} \right) + u^* \left(1 - \frac{Q_0}{Q} \right) \frac{N\sigma I}{1+\tau\sigma I + K\tau\sigma^2 I^2} - u^* X \\ &= \frac{c \left(\frac{\lambda_1 S}{c} - \frac{\lambda_1 S_{in}}{c} + \frac{\lambda_3 X}{c} \right)^2}{2} - x + \lambda_1 \left(\left(\frac{\lambda_1 S}{c} - \frac{\lambda_1 S_{in}}{c} + \frac{\lambda_3 X}{c} \right) S_{in} - \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\lambda_1 S}{c} - \frac{\lambda_1 S_{in}}{c} + \frac{\lambda_3 X}{c} \right) S - \bar{\rho} \left(\frac{S}{S+K_s} \right) X \right) + \lambda_2 \left(\bar{\rho} \left(\frac{S}{S+K_s} \right) - \right. \\ &\quad \left. \bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q} \right) \frac{N\sigma I}{1+\tau\sigma I + K\tau\sigma^2 I^2} \right) + \lambda_3 \left(\bar{\mu} \left(1 - \frac{Q_0}{Q} \right) \frac{N\sigma I}{1+\tau\sigma I + K\tau\sigma^2 I^2} - \left(\frac{\lambda_1 S}{c} - \frac{\lambda_1 S_{in}}{c} + \frac{\lambda_3 X}{c} \right) X \right) \\ &= \frac{\lambda_3^2 X^2}{2c} + \frac{SX\lambda_1\lambda_3}{c} - \frac{X\lambda_1\lambda_3 S_{in}}{c} + \frac{S^2\lambda_1^2}{2c} + \frac{\lambda_1^2 S_{in}^2}{2c} - \frac{SS_{in}\lambda_1^2}{2c} - X + \\ &\quad \frac{\lambda_1^2 SS_{in}}{c} + \frac{\lambda_{13}XS_{in}}{c} - \frac{\lambda_1^2 S_{in}^2}{c} - \frac{\lambda_1^2 S^2}{c} - \frac{\lambda_1\lambda_3 SX}{c} + \frac{\lambda_1^2 SS_{in}}{c} - \\ &\quad \lambda_1 \bar{\rho} X \left(\frac{S}{S+K_s} \right) + \lambda_2 \bar{\rho} \left(\frac{S}{S+K_s} \right) - \lambda_2 \bar{\mu} Q \left(1 - \frac{Q_0}{Q} \right) \frac{N\sigma I}{1+\tau\sigma I + K\tau\sigma^2 I^2} + \lambda_3 \bar{\mu} X \left(1 - \frac{Q_0}{Q} \right) \frac{N\sigma I}{1+\tau\sigma I + K\tau\sigma^2 I^2} - \\ &\quad \frac{\lambda_3 X \lambda_1 S}{c} - \frac{\lambda_3^2 X^2}{2c} + \frac{\lambda_{31}XS_{in}}{c} \\ &= \frac{\lambda_3^2 X^2}{2c} - \frac{S^2\lambda_1^2}{2c} - \frac{\lambda_1^2 S_{in}^2}{2c} - \frac{SS_{in}\lambda_1^2}{2c} - X + \frac{\lambda_1^2 SS_{in}}{c} - \\ &\quad \lambda_1 \bar{\rho} X \left(\frac{S}{S+K_s} \right) + \lambda_2 \bar{\rho} \left(\frac{S}{S+K_s} \right) - \lambda_2 \bar{\mu} Q \left(1 - \right.\end{aligned}$$

$$\frac{Q_0}{Q}) \frac{N\sigma I}{1+\tau\sigma I+K\tau\sigma^2 I^2} + \lambda_3 \bar{\mu} X \left(1 - \frac{Q_0}{Q}\right) \frac{N\sigma I}{1+\tau\sigma I+K\tau\sigma^2 I^2} - \frac{\lambda_3 X \lambda_1 S}{c} - \frac{\lambda_3^2 X^2}{c} + \frac{\lambda_3 X S_{in}}{c} \quad (4.7)$$

Selanjutnya persamaan (4.7) akan digunakan untuk mendapatkan persamaan *state* dan *costate* yang optimal.

a. Persamaan *State*

Persamaan untuk $\dot{s}(t)$

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_1} \\ &= -\frac{2S^2\lambda_1}{2c} - \frac{2\lambda_1 S_{in}^2}{2c} + \frac{2\lambda_1 S S_{in}}{c} - \bar{\rho} X \left(\frac{S}{S+K_s} \right) \\ &\quad - \frac{\lambda_3 X S}{c} + \frac{\lambda_3 X S_{in}}{c} \\ &= -\frac{S^2\lambda_1}{c} - \frac{\lambda_1 S_{in}^2}{c} + \frac{2\lambda_1 S S_{in}}{c} - \bar{\rho} X \left(\frac{S}{S+K_s} \right) \\ &\quad - \frac{\lambda_3 X S}{c} + \frac{\lambda_3 X S_{in}}{c} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Persamaan untuk $\dot{q}(t)$

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_2} \\ &= \bar{\rho} \left(\frac{S}{S+K_s} \right) - \bar{\mu} Q \left(1 - \frac{Q_0}{Q} \right) \frac{N\sigma I}{1+\tau\sigma I+K\tau\sigma^2 I^2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Persamaan untuk $\dot{x}(t)$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_3} \\ &= \frac{2\lambda_3 X^2}{2c} + \bar{\mu} X \left(1 - \frac{Q_0}{Q} \right) \frac{N\sigma I}{1+\tau\sigma I+K\tau\sigma^2 I^2} \\ &\quad - \frac{\lambda_1 X S}{c} - \frac{2\lambda_3 X^2}{c} + \frac{\lambda_1 X S_{in}}{c} \end{aligned}$$

$$= -\frac{\lambda_3 X^2}{c} + \bar{\mu} X \left(1 - \frac{Q_0}{Q}\right) \frac{N\sigma I}{1 + \tau\sigma I + K\tau\sigma^2 I^2} - \frac{\lambda_1 X S}{c} + \frac{\lambda_1 X S_{in}}{c} \quad (4.10)$$

b. Persamaan *Costate*

Persamaan untuk $\dot{\lambda}_1(t)$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t) &= -\frac{\partial H^*}{\partial S} \\ &= \frac{2S\lambda_1^2}{2c} - \frac{\lambda_1^2 S_{in}}{c} \\ &\quad + \lambda_1 \bar{\rho} X \left(-\frac{S}{(S + K_s)^2} + \frac{1}{S + K_s} \right) \\ &\quad - \lambda_2 \bar{\rho} \left(-\frac{S}{(S + K_s)^2} + \frac{1}{S + K_s} \right) + \frac{\lambda_1 \lambda_3 X}{c} \\ &= \frac{S\lambda_1^2}{c} - \frac{\lambda_1^2 S_{in}}{c} - \lambda_1 \bar{\rho} X \left(\frac{S}{(S + K_s)^2} \right) \\ &\quad + \lambda_1 \bar{\rho} X \left(\frac{1}{S + K_s} \right) + \lambda_2 \bar{\rho} \left(\frac{S}{(S + K_s)^2} \right) \\ &\quad - \lambda_2 \bar{\rho} \left(\frac{1}{S + K_s} \right) + \frac{\lambda_1 \lambda_3 X}{c} \quad (4.11) \end{aligned}$$

Persamaan untuk $\dot{\lambda}_2(t)$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_2(t) &= -\frac{\partial H^*}{\partial q} \\ &= \lambda_2 \bar{\mu} \frac{N\sigma I}{1 + \tau\sigma I + K\tau\sigma^2 I^2} \\ &\quad - \lambda_3 \bar{\mu} X \frac{N\sigma I}{1 + \tau\sigma I + K\tau\sigma^2 I^2} \left(\frac{Q_0}{Q} \right) \quad (4.12) \end{aligned}$$

Persamaan untuk $\dot{\lambda}_3(t)$

$$\dot{\lambda}_3(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x}$$

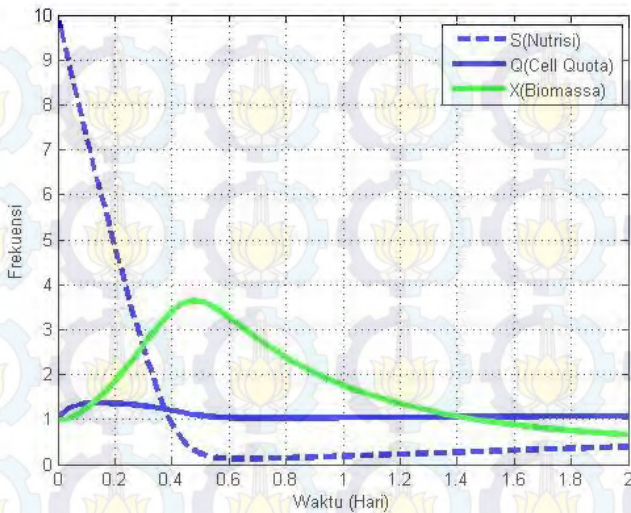
$$\begin{aligned}
&= -\frac{2\lambda_3^2 X}{2c} + 1 + \lambda_1 \bar{\rho} \left(\frac{S}{S + K_s} \right) \\
&\quad - \lambda_3 \bar{\mu} \frac{N\sigma I}{1 + \tau\sigma I + K\tau\sigma^2 I^2} \left(1 - \frac{Q_0}{Q} \right) \\
&\quad + \frac{\lambda_3 \lambda_1 S}{c} + \frac{2X\lambda_3^2}{c} - \frac{\lambda_1 \lambda_3 S_{in}}{c} \\
&= \frac{X\lambda_3^2}{c} + 1 + \lambda_1 \bar{\rho} \left(\frac{S}{S + K_s} \right) \\
&\quad - \lambda_3 \bar{\mu} \frac{N\sigma I}{1 + \tau\sigma I + K\tau\sigma^2 I^2} \left(1 - \frac{Q_0}{Q} \right) \\
&\quad + \frac{\lambda_3 \lambda_1 S}{c} - \frac{\lambda_1 \lambda_3 S_{in}}{c} \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Langkah selanjutnya adalah menyelesaikan persamaan *state* dan *costate* yang membentuk suatu sistem persamaan differensial tak linear. Karena penyelesaiannya tidak mudah didapatkan secara analitik, maka permasalahan tersebut diselesaikan secara numerik. Dalam Tugas Akhir ini digunakan fungsi BVP4C Matlab untuk menyelesaikan sistem persamaan differensial. BVP4C adalah fungsi yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan differensial dengan masalah nilai batas secara numerik [11].

4.3 Simulasi dan Analisis Hasil Simulasi

Pada pembahasan ini diberikan nilai parameter yang digunakan untuk mensimulasikan permasalahan kendali optimal pada mikroalga. Adapun nilai parameter yang digunakan seperti pada tabel 2.1 dengan $t_f = 2$ dan $c = 21 \leq c \leq 36$.

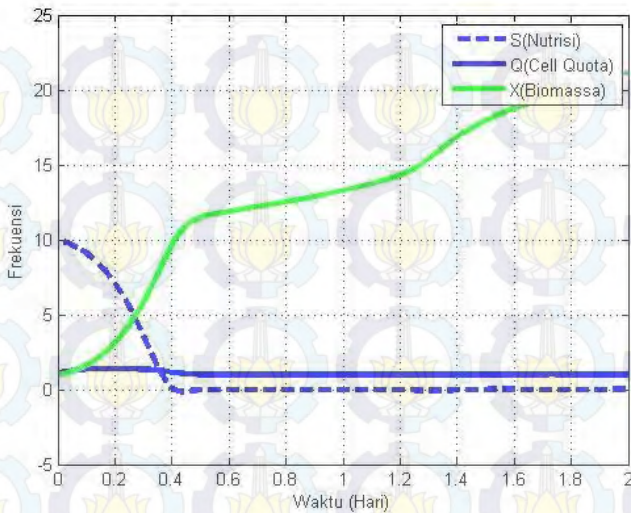
Simulasi pertama yang dilakukan adalah ketika sistem tanpa kendali, artinya tidak ada satu variabel/parameter yang dikendalikan.



Gambar 4.2 Tingkat Hasil Biomassa Tanpa Pengendalian

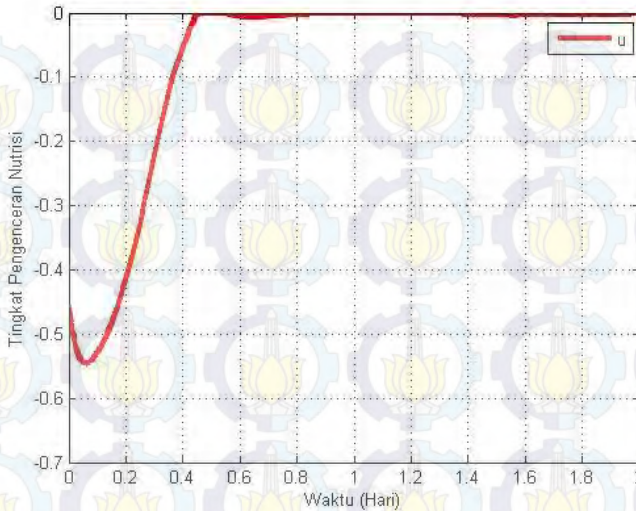
Gambar 4.2 menunjukkan perilaku tingkat hasil selama 2 hari. Dari grafik terlihat bahwa biomassa mula-mula mengalami peningkatan sampai titik 0.47 (pada hari ke 0.47) kemudian hasil biomassa tersebut mengalami penurunan sampai hari kedua. Grafik jumlah biomassa yang dihasilkan naik, namun setelah masukkan nutrisi berhenti maka jumlah biomassa akan mengalami penurunan menuju titik nol.

Simulasi berikutnya adalah dengan pengendalian. Gambar 4.3 menunjukkan tingkat hasil biomassa dengan adanya pengendalian tingkat pengenceran nutrisi.



Gambar 4.3 Tingkat Hasil Biomassa dengan Pengendalian

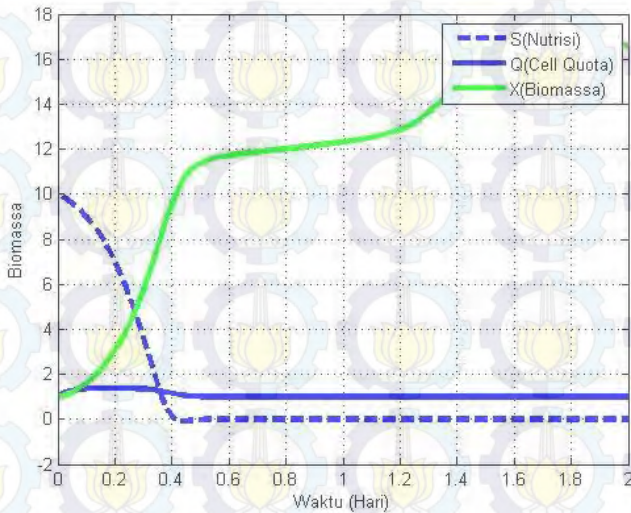
Gambar 4.3 menunjukkan perilaku hasil biomassa dengan adanya pengendalian tingkat pengenceran nutrisi. Dari grafik terlihat bahwa grafik terus meningkat sampai pada titik 0.4 (pada hari ke 0.4), kemudian biomassa relatif tetap pada waktu yang singkat. Setelah itu biomassa mengalami peningkatan yang cukup tinggi sampai pada hari ke-2. Artinya, jumlah biomassa meningkat sampai nutrisi tersebut hampir habis, namun karena ada pengendalian tingkat pengenceran nutrisi, jumlah biomassa kembali naik. Hal ini sesuai dengan pola pengenceran nutrisi itu sendiri.



Gambar 4.4 Grafik Tingkat Pengenceran Nutrisi

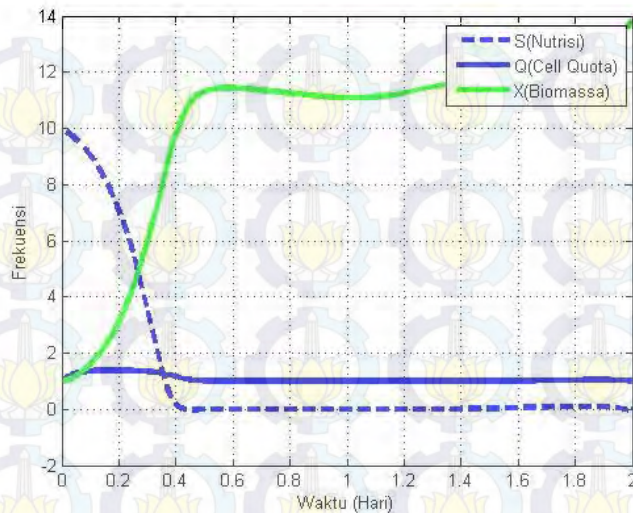
Pada Gambar 4.4 terlihat grafik u mengalami penurunan mulai di titik 0 sampai 0.09, kemudian naik sampai titik 0.4 dan relatif tetap sampai titik 2. Artinya, mula-mula nutrisi yang kita berikan pada mikroalga adalah kental (tingkat pengencerannya < 0) sampai pada titik 0.09 kemudian nutrisi tersebut perlahan-lahan diencerkan sampai titik ke 0.4.

Gambar 4.5 menampilkan grafik jumlah biomassa dengan nilai parameter $c = 23$. Seperti pada Gambar 4.5 dapat dilihat bahwa jumlah nutrisi baru meningkat saat di titik 0.4, kemudian perlahan naik sampai di titik 2. Artinya, dengan nilai $c = 23$, jumlah biomassa akan meningkat seperti saat $c = 25$, namun jumlah biomassa yang dihasilkan masih belum seoptimal $c = 25$.



Gambar 4.5 Grafik Tingkat jumlah biomassa dengan $c = 23$

Gambar 4.6 menampilkan grafik jumlah biomassa dengan nilai parameter $c = 30$. Seperti pada Gambar 5 dapat dilihat bahwa jumlah nutrisi terus meningkat sampai di titik 0.4, kemudian jumlah biomassa akan perlahan turun naik sampai titik 2. Artinya, dengan nilai $c = 30$, jumlah biomassa meningkat dalam beberapa saat di awal, namun untuk beberapa saat kemudian hasil biomassa akan perlahan menurun dan meningkat.



Gambar 4.6 Grafik Tingkat jumlah biomassa dengan $c = 30$

Berdasarkan hasil simulasi, terlihat bahwa adanya pengendalian sangat berpengaruh terhadap jumlah biomassa yang dihasilkan. Disamping itu juga nilai parameter c juga sangat mempengaruhi jumlah biomassa. Nilai parameter c juga sangat mempengaruhi jumlah biomassa. Berikut adalah tabel hasil biomassa dengan interval nilai c adalah $21 \leq c \leq 36$.

Tabel 4.1 Perbandingan Nilai c Terhadap Hasil Biomassa

Nilai c	Biomassa (mgC/L)
21	0
22	3,281
23	16,8
24	2,452

Nilai <i>c</i>	Biomassa (<i>mgC/L</i>)
25	21,14
26	0
27	0
28	0
29	2,328
30	14
31	0
32	0
33	0
34	11,254
35	0
36	0,26



BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini berisi tentang kesimpulan yang dihasilkan berdasarkan penelitian yang telah dilaksanakan serta saran yang diberikan jika penelitian ini ingin dikembangkan.

5.1 Kesimpulan

Dari analisis dan pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

- a. Dengan menerapkan teori kendali optimal menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin diperoleh pengendalian optimal untuk memaksimalkan hasil biomassa dengan pengaturan tingkat pengenceran nutrisi.
- b. Berdasarkan hasil simulasi, dapat kita ketahui bahwa dengan melakukan pengendalian terhadap tingkat pengenceran nutrisi, hasil biomassa yang didapat akan meningkat.
- c. Nilai parameter c (bobot biaya pengenceran) juga sangat mempengaruhi jumlah biomassa. Interval untuk nilai c adalah $21 \leq c \leq 36$, dan berdasarkan hasil simulasi diperoleh hasil biomassa yang optimal saat $c = 25$.

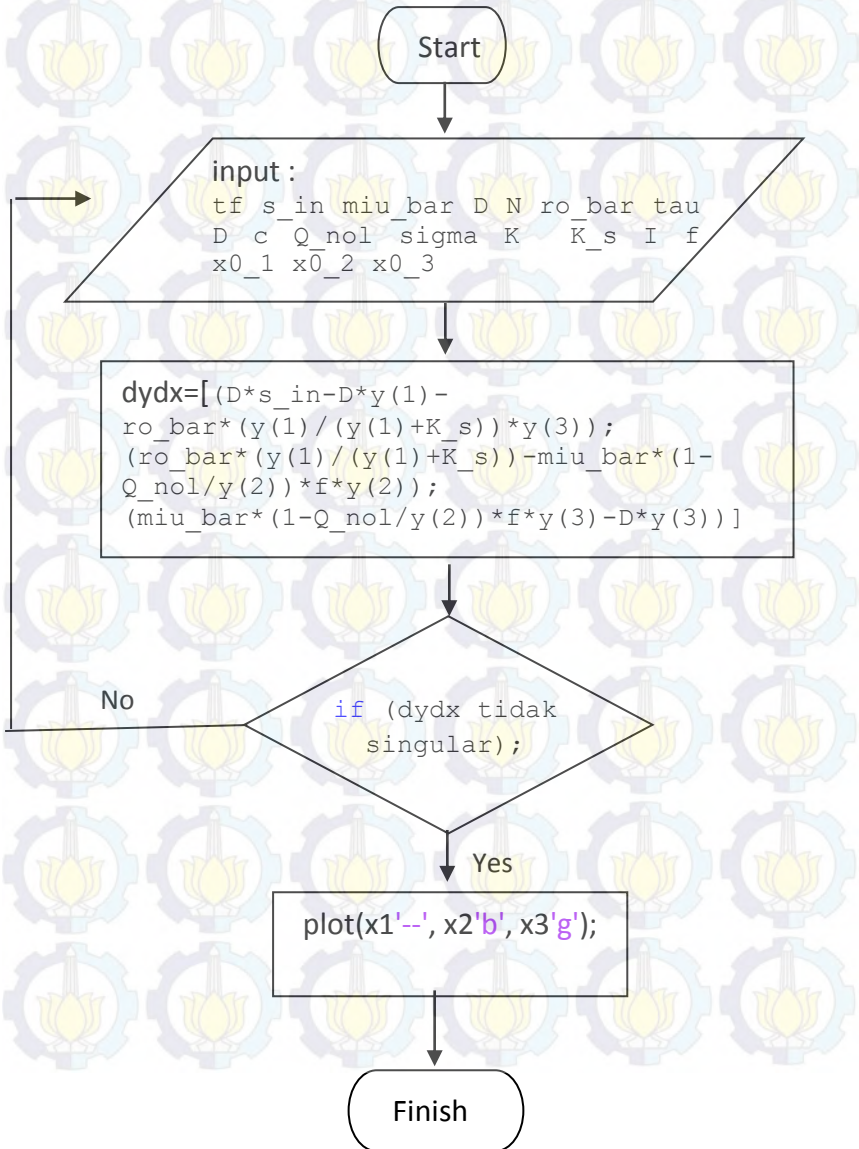
5.2 Saran

Pada Tugas Akhir ini hanya membahas tentang pengendalian tingkat pengenceran nutrisi saja. Oleh karena itu, penulis menyarankan agar penelitian selanjutnya bisa melakukan kendali terhadap cahaya, ataupun terhadap parameter lain, baik hanya satu kendali maupun dua kendali.



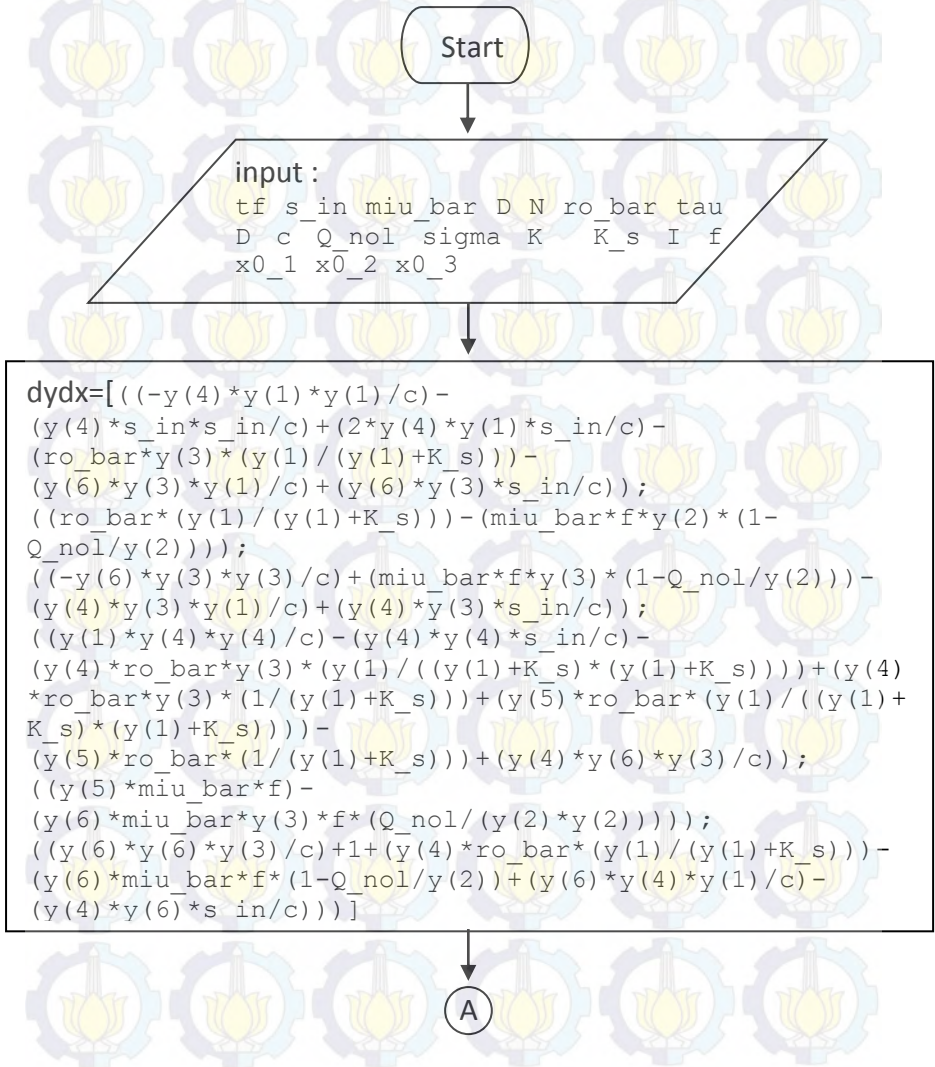
Lampiran 1

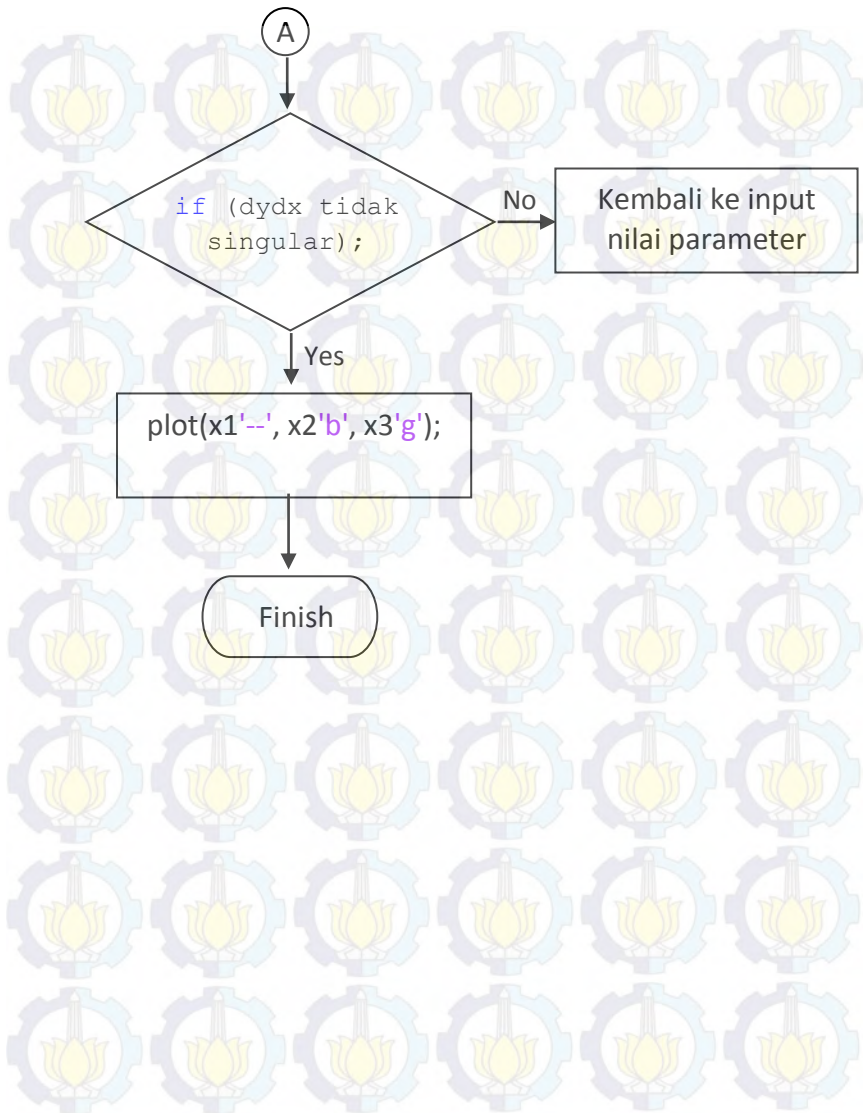
Diagram Alir Simulasi tanpa Kendali dari Bolza.m



Lampiran 2

Diagram Alir Simulasi dengan Kendali dari Bolza.m





Lampiran 3

Sistem Tanpa Kendali:

Bolzacall.m

```
clc
close

disp('SIMULASI TANPA KENDALI')
disp('OPTIMAL')
disp('OLEH:')
disp('MUHAMMAD SAMSUL MAARIF')
disp('1212100064')
disp('')
disp('')

flag=0;
flag1=0;
flag2=0;

while(flag==0)
    var = input('Masukkan banyaknya waktu: ');
    if(var<0 || var==0)
        disp('')
        disp('ERROR: input harus positif.')
        disp('')
    else
        flag=1;
        lambda=var;
    end
end
flag=0;
disp('')
%
```

```
disp('Mohon tunggu sesaat...')
```

```
y1=Bolza(lambda);
```

```
y1(1,:)
```

```
disp('')
```

```
figure(1)
```

```
plot(y1(1,:),y1(2,:), '--',y1(1,:),y1(3,:), 'b',y1(1,:),y1(4,:), 'g','li  
newwidth',3)
```

```
xlabel('Waktu (Hari)')
```

```
ylabel('Frekuensi')
```

```
legend('S(Nutrisi)', 'Q(Cell  
Quota)', 'X(Biomassa)')
```

```
grid on
```

Bolza.m

```
function m = Bolza(p8)
```

```
global tf s_in miu_bar D N ro_bar tau D c  
Q_nol sigma K K_s I f x0_1 x0_2 x0_3
```

```
s_in = 1;  
miu_bar = 12.4;  
N = 5.9;  
ro_bar = 11.4;  
tau = 2.4;  
K_s = 2;  
sigma = 1.2;  
K = 0.001;  
Q_nol = 1;  
c = 25;  
I=1.2;
```

```
D=2.3;
```

```
f=((N*sigma*I)/(1+tau*sigma*I+K*tau*sigma*sigma*I*I));
x0_1=10;
x0_2=1;
x0_3=1;
```

```
tf=p8;
```

```
solinit = bvpinit(linspace(0,tf),Bolzainit);
```

```
sol = bvp4c(@Bolzaode,@Bolzabc,solinit);
```

```
time = sol.x;
state1 = sol.y(1,:);
state2 = sol.y(2,:);
state3 = sol.y(3,:);
```

```
;
```

```
m(1,:) = time;
m(2,:) = state1;
m(3,:) = state2;
m(4,:) = state3;
```

```
%
```

```
function dydt=Bolzaode(~,y)
```

```

global s_in miu_bar N ro_bar tau K K_s I
sigma f c Q_nol D

%Dengan kontrol
dydt=[(D*s_in-D*y(1)-
ro_bar*(y(1)/(y(1)+K_s))*y(3))
(ro_bar*(y(1)/(y(1)+K_s))-miu_bar*(1-
Q_nol/y(2))*f*y(2))
(miu_bar*(1-Q_nol/y(2))*f*y(3)-D*y(3))]

%
-----

function res=Bolzabc(ya,yb)
global x0_1 x0_2 x0_3

%boundary condition
res=[ya(1) - x0_1
ya(2) - x0_2
ya(3) - x0_3];

%
-----

function v=Bolzainit(~)
global x0_1 x0_2 x0_3
v=[x0_1
x0_2
x0_3];

```


Lampiran 4

Sistem Dengan Kendali:

Bolzacall.m

```
clc
close

disp('                                SIMULASI KENDALI
OPTIMAL')
disp('PENGENCERAN  NUTRISI UNTUK
MEMAKSIMALKAN HASIL BIOMASSA ')
disp('                                OLEH:')
disp('                                MUHAMMAD SAMSUL
MAARIF')
disp('                                1212100064')
disp('                                ')
disp('                                ')

flag=0;
flag1=0;
flag2=0;

while(flag==0)
    var = input('Masukkan banyaknya waktu:
');
    if(var<0 || var==0)
        disp('                                ')
        disp('ERROR: input harus positif.')
        disp('                                ')
    else
        flag=1;
        lambda=var;
    end
end
flag=0;
```

```

disp('
%
disp('Mohon tunggu sesaat...')
y1=Bolza(lambda);
y1(1,:);
disp('
figure(1)
plot(y1(1,:),y1(2,:), '--
',y1(1,:),y1(3,:), 'b',y1(1,:),y1(4,:), 'g', 'li
linewidth',3)
xlabel('Waktu (Hari)')
ylabel('Frekuensi')
legend('S(Nutrisi)', 'Q(Cell
Quota)', 'X(Biomassa)')
grid on
figure(2)
plot(y1(1,:),y1(8,:), 'r', 'linewidth',3)
xlabel('Waktu (Hari)')
ylabel('Tingkat
Pengenceran Nutrisi')
legend('u')
grid on
Bolza.m
function m = Bolza(p8)
global tf s_in miu_bar D N ro_bar tau c
Q_nol sigma K K_s I f x0_1 x0_2 x0_3

```

```

s_in = 1;
miu_bar = 12.4;
N = 5.9;
ro_bar = 11.4;
tau = 2.4;
K_s = 2;
sigma = 1.2;
K = 0.001;
Q_nol = 1;
c = 25;
I=1.2;

f=((N*sigma*I)/(1+tau*sigma*I+K*tau*sigma*sig
ma*I*I));
x0_1=10;
x0_2=1;
x0_3=1;

tf=p8;

solinit = bvpinit(linspace(0,tf),Bolzainit);
sol = bvp4c(@Bolzaode,@Bolzabc,solinit);

time = sol.x;
state1 = sol.y(1,:);
state2 = sol.y(2,:);
state3 = sol.y(3,:);
adjoint1 = sol.y(4,:);
adjoint2 = sol.y(5,:);
adjoint3 = sol.y(6,:);

```

```
u = min(min(0, ((adjoint3.*state2-
adjoint1.*s_in+adjoint1.*state1)/c)),7);
```

```
J=0;
f1=((c.*(u(1)*u(1)))./2)-state3(1);
for i=1:length(time)-1
    f2=((c.*(u(1+i)*u(1)))./2)-state3(1+i);
    J=J+0.5*(f1+f2)*(time(i+1)-time(i));
    f1=f2;
```

```
end
```

```
J = J;
m(1,:) = time;
m(2,:) = state1;
m(3,:) = state2;
m(4,:) = state3;
m(5,:) = adjoint1;
m(6,:) = adjoint2;
m(7,:) = adjoint3;
m(8,:) = u;
```

```
%
```

```
function dydt=Bolzaode(~,y)
global s_in miu_bar N ro_bar tau K K_s I
sigma f c Q_nol
```

```
%Dengan kontrol
```

```
dydt=[((-y(4)*y(1)*y(1)/c)-
(y(4)*s_in*s_in/c)+(2*y(4)*y(1)*s_in/c)-
(ro_bar*y(3)*(y(1)/(y(1)+K_s)))-
(y(6)*y(3)*y(1)/c)+(y(6)*y(3)*s_in/c))
((ro_bar*(y(1)/(y(1)+K_s)))-
(miu_bar*f*y(2)*(1-Q_nol/y(2))))
((-y(6)*y(3)*y(3)/c)+(miu_bar*f*y(3)*(1-
Q_nol/y(2))))-
(y(4)*y(3)*y(1)/c)+(y(4)*y(3)*s_in/c))
((y(1)*y(4)*y(4)/c)-(y(4)*y(4)*s_in/c)-
(y(4)*ro_bar*y(3)*(y(1)/((y(1)+K_s)*(y(1)+K_s
))))+(y(4)*ro_bar*y(3)*(1/(y(1)+K_s)))+(y(5)*
```



```

ro_bar*(y(1)/((y(1)+K_s)*(y(1)+K_s)))-
(y(5)*ro_bar*(1/(y(1)+K_s)))+(y(4)*y(6)*y(3)/
c))
((y(5)*miu_bar*f)-
(y(6)*miu_bar*y(3)*f*(Q_nol/(y(2)*y(2))))
((y(6)*y(6)*y(3)/c)+1+(y(4)*ro_bar*(y(1)/(y(1)
)+K_s)))-(y(6)*miu_bar*f*(1-
Q_nol/y(2)))+(y(6)*y(4)*y(1)/c)-
(y(4)*y(6)*s_in/c)))]

```

```
%-----
```

```

function res=Bolzabc(ya,yb)
global x0_1 x0_2 x0_3

```

```

%boundary condition
res=[ya(1) - x0_1
      ya(2) - x0_2
      ya(3) - x0_3
      yb(4)
      yb(5)
      yb(6)];

```

```
%-----
```

```

function v=Bolzainit(~)
global x0_1 x0_2 x0_3
v=[x0_1
    x0_2
    x0_3
    0.5
    0.8
    0.2];

```

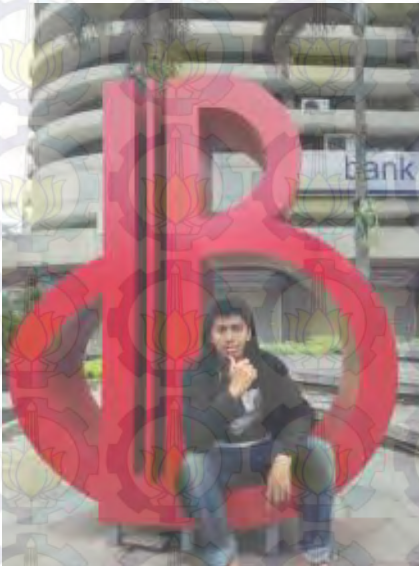
DAFTAR PUSTAKA

- [1] Demirbas, A. (2008). Biodiesel, A Realistic Fuel Alternative for Diesel Engines. *Springer. Hardcover* ISBN: 978-1-84628-994-1
- [2] Pusat Data dan Informasi Energi Sumber Daya Mineral KESDM. (2010). *Indonesia Energy Outlook 2010*. Jakarta.
- [3] Virama, H.C.M. (2015). *Analisis Model Droop Untuk Pertumbuhan Mikroalga terhadap Keterbatasan Nutrisi*. Tugas Akhir Jurusan Matematika. Surabaya, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- [4] Nacong, N. dan Mardijah. (2015). “Analisis Dinamik Produksi Lipid Netral pada Pertumbuhan Mikroalga dengan Keterbatasan Nutrisi”. Prosiding Seminar Nasioanal Matematika dan Pendidikan Matematika, (2015, April), 327-334.
- [5] Hajar dan Mardijah. (2015). “Stabilitas Model Pertumbuhan Alga”. Prosiding Seminar Nasioanal Matematika dan Pendidikan Matematika, (2015, April), 138-144.
- [6] Mahmuda, R. (2015). *Pengendalian Optimal Fotobioreaktor Melalui Tingkat Pengenceran untuk Memaksimalkan Produksi Biomassa*. Tugas Akhir Jurusan Matematika. Surabaya, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- [7] Droop, M.R. (1968). Vitamin B12 and marine ecology. IV. The kinetics of uptake growth and inhibition in

Monochrysis lutheri. *J. Mar. Biol. Assoc.* 48 (3) (1968) 689–733.

- [8] Borowitzka, M.A. (1999). Pharmaceuticals and agrochemicals from microalgae. In: Cohen Z (Ed). *Chemicals from Microalgae*. Taylor & Francis: 313-352.
- [9] Hadiyanto, I. dkk. (2010). “Produksi Mikroalga Berbiomassa Tinggi dalam reactor Open Pond”. Prosiding Seminar Nasional Teknik Kimia “*Kejuangan*”, (2010, Jan.), 1-6.
- [10] Naidu, D.S. (2003) . *Optimal Control Systems*. CRC Press: Manchester, United States of America.
- [11] Shampine, L.F., Kierzenk, J., Reichelt, M.W., (2000). *Solving Boundary Value Problem for Ordinary Differential Equation in Matlab With BVP4C*. USA.

BIODATA PENULIS



Penulis memiliki nama lengkap Muhammad Samsul Ma'arif. Penulis dilahirkan di Lamongan pada tanggal 05 Maret 1994 dan merupakan anak kedua dari 3 bersaudara. Pendidikan formal yang pernah ditempuh yaitu SD Negeri Butungan, MI Dalailul Khoirot, MTs Putra-Putri Simo, MA Matholi'ul Anwar Simo. Setelah lulus dari MA, penulis yang suka dipanggil dengan nama "Yaman" ini melanjutkan

studi di Matematika ITS melalui Jalur SNMPTN Tulis 2012. Pada masa perkuliahan penulis mengambil bidang matematika terapan untuk bidang yang diminati. Selama penulisan Tugas Akhir ini Penulis tidak lepas dari kekurangan, untuk kritik, saran, dan pertanyaan mengenai Tugas Akhir ini dapat dikirimkan melalui *email* ke yamansamsul63@gmail.com atau *sms* ke 085853939349.

